UN PROBLEMA CON INTERÉS Y CALCULADORA

José Antonio Mora Sánchez. Alacant

Las calculadoras ofrecen la posibilidad de modificar la óptica desde la que se abordan ciertos problemas matemáticos, esto hace que situaciones que antes sólo se podían estudiar en determinadas edades -y sólo por una parte de los estudiantes-, ahora tengamos la posibilidad de proponerlas en cursos anteriores.

Vamos a analizar una situación de gran actualidad para gran cantidad de ciudadanos/as: intereses, préstamos y amortizaciones en el que se modificarán los conocimientos matemáticos que tradicionalmente se utilizan para abordarlo. El enunciado podría ser:

> *Una persona solicita un préstamo de 600 000 pesetas a una compañía financiera con las siguientes condiciones:*
>
> **El interés que pagará es el equivalente al 7% mensual.*
>
> **El dinero prestado se devolverá en tres meses, los recibos serán de la misma cuantía.*
>
> **El recibo de cada mes será el resultado de sumar la parte del capital que se devuelve y la parte de intereses que se paga.*
>
> *¿Cuál será el importe del recibo mensual?*

Hay un método de resolución consistente en identificar el tipo de amortización que se aplica según las condiciones del problema -resulta ser el llamado método francés o de amortización progresiva-, y buscar en un libro especializado la fórmula correspondiente:

$$a_{n,i} = [(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \dots \quad \dots + (1+i)^{-n}]$$

$$\mathsf{a} = C\, a_{n,i}^{-1}$$

$a_{n,i}$ = Valor de la renta unitaria de n términos.
n = Número de términos de la renta.
i = tanto de interés unitario al que se valora la renta.
C = Capital prestado
a = Pago en cada plazo.

En caso de haber logrado salvar el paso anterior, nos encontramos con que algo aparentemente sencillo como la aplicación de una fórmula, se convierte en un auténtico jeroglífico imposible de descifrar para los no iniciados. En las matemáticas escolares este procedimiento únicamente tendría sentido como ejercicio complejo de sustitución en fórmulas. Resulta excesivamente difícil para estudiantes de 14-15 años, y para los de cursos posteriores cae fuera del centro de interés de los programas, excepción hecha de los estudios profesionales de administración. Pero el gran inconveniente didáctico es el escaso aprendizaje matemático que proporciona.

Por otra parte, la situación pertenece a una actividad importante en la sociedad actual, por lo que puede ser interesante abordarla desde la perspectiva de las matemáticas de la enseñanza obligatoria. En realidad es un problema de porcentajes que, si invertimos el tiempo suficiente en la traducción de la información al lenguaje matemático y en la organización de los datos y los resultados parciales, se convierte en un problema resoluble por ensayo y error.

Los conceptos implicados -porcentajes-, y el heurístico -tanteo-, están al alcance de los estudiantes. Si disponemos de calculadoras, no habrá que prestar atención a la realización de cálculos -aunque sí a al control de los resultados-. Con todo esto vamos delimitando el objetivo central de la tarea propuesta: el proceso de matematización del problema.

Para el cálculo de porcentajes, podemos utilizar la tecla de $\boxed{\%}$ de la calculadora:

$$600\,000 \boxed{\times} 0{,}7 \boxed{\%} \boxed{=} \boxed{4\,200}$$

aunque resulta más interesante que el estudiante analice el efecto de multiplicar por un porcentaje, el 0,7%, que consiste simplemente en multiplicar por 0,7 y dividir por 100, para resumir todo esto con la acción de multiplicar por 0,007.

$$600\,000 \boxed{\times} 0{,}007 \boxed{=} \boxed{4\,200}$$

Con esta forma de trabajar, es fácil llegar a que podemos calcular un aumento del 12% con sólo multiplicar por 1,12 y que una disminución del 8% se obtiene multiplicando por 0,92. De esta manera no se introduce el porcentaje como una operación nueva, sino que se conecta con las operaciones ya conocidas y tiene la ventaja añadida de enlazar los porcentajes con los decimales y las fracciones lo que redundará en la consolidación de las estructuras conceptuales de números y operaciones, tan difícil de conseguir con los métodos tradicionales de enseñanza.

Volvemos al enunciado: un problema de amortización de una cantidad a un interés determinado en tres plazos. Una tabla que intente organizar los datos debe recoger:

*el capital pendiente Antes del pago (A).
*el Interés del dinero pagado en ese recibo. (I = 0,7% de A).
*el importe del Recibo (R es fijo para los tres meses).
*el capital Pagado en ese recibo. (P = R - I).
*el capital pendiente Después del recibo (D = A - P).

	A	I	P	R	D
R1	600.000				
R2					
R3					

Si los intereses de las 600 000 pesetas durante el primer mes son 4 200, podemos hacer una primera estimación del recibo con una cantidad de 204 200 pesetas.

	A	I	P	R	
R1	600 000	4 200	200 000	204 200	400 000
R2	400 000	2 800	201 400	204 200	198 600
R3	198 600	1390,2	202 809,8	204 200	-4 209,8

El resultado de la última casilla indica el control de la aproximación del método de tanteo utilizado, es el que nos dice cómo hay que corregir el valor del nuevo ensayo para aproximarnos más al resultado deseado. En este caso nos muestra que hay una diferencia de 4 209,8 pesetas entre lo que hemos pagado y lo que deberíamos pagar. El signo negativo indica que hemos pagado más de lo que debíamos. El siguiente ensayo debe tener esto en cuenta y reducir aproximadamente 1 400 pesetas cada recibo.

	A	I	P	R	
R1	600 000	4 200	198 600	202 800	401 400
R2	401 400	2 809,8	199 990,2	202 800	201 409,8
R3	201 409,8	1 409,9	201 390,1	202 800	19,7

Cuando ya se han realizado algunas pruebas, podemos pedir que investiguen el modo de hacer las operaciones de forma que siempre aprovechen el último número aparecido en la pantalla con el fin de no tener que anotar resultados intermedios, por ejemplo:

Aquí tenemos la secuencia para la calculadora TI Galaxy-40:

Operaciones	Pantalla	Casilla
600 000 [x] 0,007 [-]	4 200	
202 800 [+]	-198 600	P-R1 (positivo)
600 000 [=]	401 400	D-R1 y A-R2
[x] 0.007 [-]	2 809,8	I-R2
202 800 [+]	-199 990,2	P-R2 (positivo)
401 500 [=]	201 409,8	D-R2 y A-R3
[x] 0.007 [-]	1 409,9	I-R3
202 800 [+]	-201 390,1	P-R3 (positivo)
201 610,5 [=]	19,7	D-R3

Aún podemos simplificar la introducción de datos en la memoria con la utilización de la memoria: introducir 202 800 [STO] al principio y pulsar [RCL] cada vez que se quiera utilizar.

En este caso, el número 19,7 de la última casilla indica lo que nos faltaría por pagar con esos recibos, por lo que debemos aumentar la cantidad en unas 6 pesetas:

	A	I	P	R	
R1	600 000	4 200	198 606	202 806	401 394
R2	401 394	2 809,8	199 996,2	202 800	201 397,8
R3	201 397,8	1 409,8	201 396,2	202 800	1,6

aún debemos 1,6 pesetas, y así podemos continuar hasta conseguir la precisión requerida.

Podemos introducir nuevos elementos de dificultad en la utilización de la calculadora y proponer la obtención de los datos de la tabla pulsando la menor cantidad de teclas. Es un buen ejercicio de búsqueda de estrategias para la traducción de nuestras ideas al lenguaje de la calculadora.

La bondad del método utilizado no sólo proviene del desarrollo numérico expuesto. También podemos aprovechar este análisis en cursos posteriores para hacer un estudio algebraico de las condiciones del problema, si llamamos x a la cantidad a pagar en cada recibo:

	A	I	P	R	D
R1	600 000	4 200	x - 4 200	x	600 000 - (x - 4 200) = y
R2	y	0,007 y	x - 0,007 y	x	y - (x - 0,007 y) = z
R3	z	0,007 z	x - 0,007 z	x	z - (x - 0,007 z) = 0

Sin la experiencia previa con datos concretos, el análisis con expresiones literales hubiera sido poco menos que imposible.

De las tres ecuaciones de la columna D obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 600\,000 - (x - 4200) = y \\ y - (x - 0{,}007\,y) = z \\ z - (x - 0{,}007\,z) = 0 \end{array}\right| \quad \text{del que obtenemos como solución} \quad x = 202\,806{,}51$$

Si para la resolución del sistema imponemos la condición de no operar nunca con los números 600 000 y 1,007 obtendremos una expresión que, cómo no, se parece mucho a la extraída del libro de matemáticas comerciales:

$$x = \frac{600\,000\,(1{,}007)^3}{1 + 1{,}007 + 1{,}007^2} = \frac{600\,000}{1{,}007^{-3} + 1{,}007^{-2} + 1{,}007^{-1}}$$

Podemos pensar que la estrategia de ensayo y error está muy bien para un caso sencillo como éste -amortización en tres pagos mensuales-, pero que resultará poco útil para los problemas más reales de préstamos hipotecarios con recibos trimestrales durante 15 o 20 años. Un proceso parecido al seguido aquí se puede trasladar a la hoja de cálculo de ordenador en la que es muy sencillo traducir las condiciones del enunciado como relaciones entre filas y columnas. Cada valor que introducimos como aproximación del valor del recibo tarda escasos segundos en convertirse en fuente de información para intentar una aproximación mejor.

Podemos investigar otros métodos de amortización, el analizado en el problema es el sistema francés en el que todos los recibos son del mismo importe. Podríamos compararlo con el sistema de cuotas de amortización constantes en el que el capital amortizado es igual en todos los recibos, y varía el importe de los intereses, con lo que la cantidad a pagar en los recibos irá disminuyendo progresivamente. Ahora podremos comparar los dos métodos de amortización y analizar cuál resulta más interesante para cada caso concreto. Los métodos matemáticos para dar respuesta a estas preguntas todavía tienen una componente numérica, aunque se apoyan más en el álgebra y el estudio de las gráficas de funciones. La herramienta apropiada para este estudio es la calculadora gráfica.

Hay muchos problemas que, como éste, pueden ser abordados mucho antes de lo que tradicionalmente se hace gracias a los avances tecnológicos y a la introducción de ópticas distintas en las estrategias de resolución, es el caso de los problemas de optimización, que para las matemáticas escolares siempre han sido una consecuencia del cálculo de derivadas, y que ahora con las calculadoras pueden tener un tratamiento tabular, gráfico e incluso algebraico que los hace más asequibles a la mayoría de los estudiantes.

La afirmación anterior parece contrastar con la tendencia generalizada a retrasar ciertos conocimientos a cursos posteriores -es el caso del concepto de derivada-, alegando razones de dificultad y/o utilidad para la mayoría de los estudiantes. Todo esto no es más que el reflejo del complejo sistema de tensiones que están actuando sobre las matemáticas escolares: las demandas sociales, las capacidades de los estudiantes y los avances tecnológicos.

Operaciones	Pantalla	Casilla
600 000 x 0,007 -		
202 700 +	-198 500	P-R1 (cambiado de signo)
600 000 =	401 500	D-R1 y A-R2
x 0.007 -	2 810,5	I-R2
202 700 +	-199 889,5	P-R2
401 500 =	201 610,5	D-R2 y A-R3
x 0.007 -	1 411,3	I-R3
202 700 +	-201 288,7	P-R3
201 610,5 =	321,8	D-R3

	A	I	P	R	D
R1	1000000,00	10000,00	78848,79	88848,79	921151,21
R2	921151,21	9211,51	79637,28	88848,79	841513,93
R3	841513,93	8415,14	80433,65	88848,79	761080,28
R4	761080,28	7610,80	81237,99	88848,79	679842,29
R5	679842,29	6798,42	82050,37	88848,79	597791,93
R6	597791,93	5977,92	82870,87	88848,79	514921,06
R7	514921,06	5149,21	83699,58	88848,79	431221,48
R8	431221,48	4312,21	84536,58	88848,79	346684,90
R9	346684,90	3466,85	85381,94	88848,79	261302,96
R10	261302,96	2613,03	86235,76	88848,79	175067,20
R11	175067,20	1750,67	87098,12	88848,79	87969,08
R12	87969,08	879,69	87969,10	88848,79	-0,02
				Int. anual =	12,00
Prueba =	88848,79			Préstamo =	1000000,00

600 000	4 200	198 500	202 700	401 500
401 500	2 810,5	199 889,5	202 700	201 610,5
201 610,5	1 411,3	201 288,7	202 700	321,8