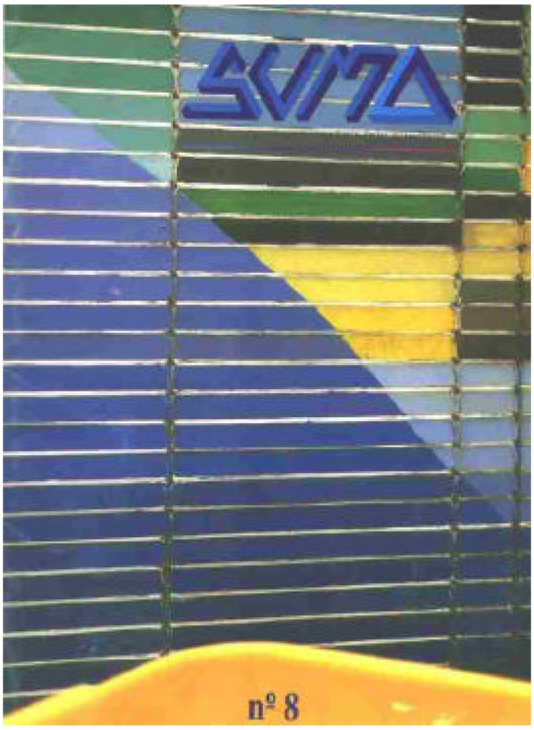
LA MITAD DEL CUADRADO

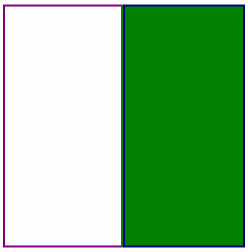
Mora, J.A. (1991) La mitad del cuadrado. Revista SUMA núm. 8 pp. 11 a 29 (Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas: Granada)



Revisión del artículo que apareció hace más de 10 años en el número 8 de la Revista SUMA editada por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y tenía por objetivo el mostrar el desarrollo de un proyecto de investigación realizado con alumnas y alumnos de 14 años. En ella se parte de un enunciado geométrico muy sencillo para estudiantes de esta edad, es el siguiente:

Enunciado

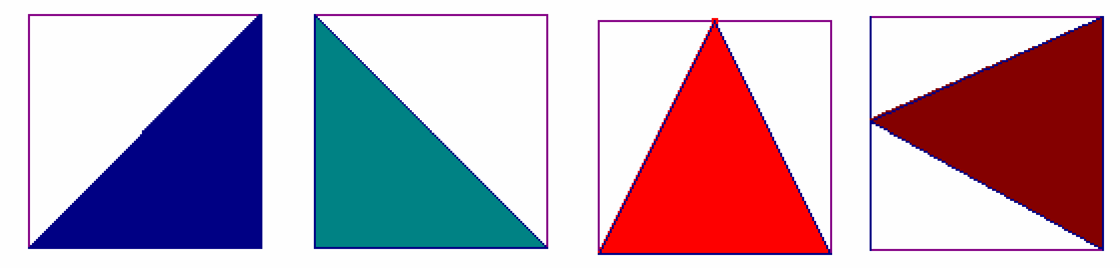
Dado un cuadrado, una forma de construir, dentro de él, un polígono cuya área sea la mitad, consiste en *tomar los puntos medios de dos lados opuestos y unirlos con un segmento*



Investiga otros procedimientos.

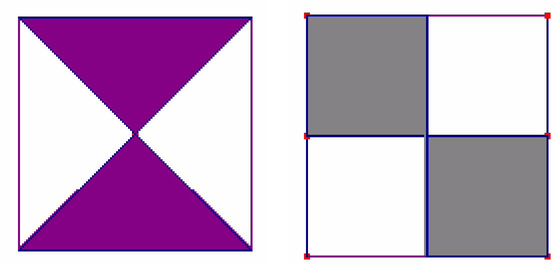
1. Primeros pasos

El enunciado no aparenta mayores dificultades ya que la pregunta es muy abierta, esto se hace para que todos los alumnos puedan abordarla y obtengan soluciones con rapidez que les sumerjan en el trabajo. Muy pronto obtienen algún procedimiento:



que en muchos casos son repetidas, es el momento de recordarles que el enunciado pide obtener nuevos procedimientos y que, tanto los dos de la izquierda como los dos de la derecha responden al mismo.

También hay que ir aclarando con ellos nuevas situaciones que aparecerán a lo largo de su trabajo: si hay que dividir el cuadrado en dos partes iguales (cosa que ocurría en el ejemplo del enunciado), si se pueden utilizar varias líneas, si pueden ser curvas, o si soluciones como las siguientes serán válidas todas estas consideraciones pueden llevar a interesantes debates en clase, como el que plantea Crawfort, D (1988) cuando plantea a la clase qué es un cuadrilátero y provoca un interesante debate acerca de si los polígonos cruzados son polígonos o no.



En la primera fase de exploración, el papel del profesor es el de “dejar hacer”, anima el trabajo de los grupos y va tomando nota de las ideas que surgen, tanto de los aciertos como de los posibles errores y los distintos enfoques. En esta fase el profesor diagnostica el nivel de los estudiantes y diseña las posibles intervenciones.

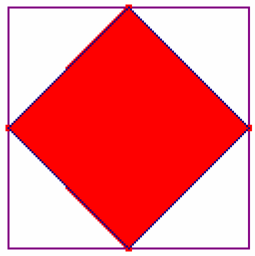
Cuando hay suficiente trabajo avanzado, el profesor puede hacer una primera puesta en común para que los estudiantes expongan ante la clase sus experiencias, intenta que sean los compañeros los que valoren los resultados obtenidos y les reta para que abran nuevas vías para el trabajo posterior.

La clave de esta fase consiste en crear en la clase el ambiente adecuado para que cualquier aportación sea analizada, debatida y valorada positivamente.

2. Delimitar nuevos problemas.

Para dar forma al trabajo exploratorio y provocar la reflexión sobre los procedimientos el momento de centrar el trabajo, para cada solución obtenida no basta con el dibujo, han de cumplir tres requisitos:

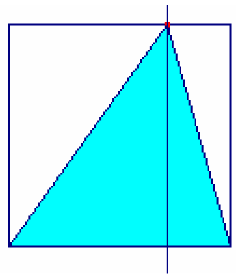
1. Dar el nombre de la figura obtenida. Para ello no basta con echar mano de la memoria fotográfica de las figuras manejadas en cursos anteriores. Es necesario revisar las definiciones para no incurrir en errores. Además, la enseñanza basada en libros de texto hace que muchos reconozcan la figura de la derecha como un rombo por su posición, no como un cuadrado.



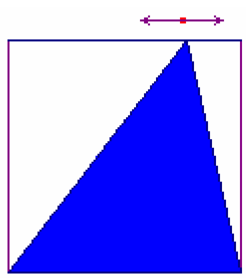
2. Describir el proceso seguido para reproducirla. Este relato ha de cumplir ciertas normas de concisión y, sobre todo de correcta utilización de la terminología matemática.
3. Probar que la solución es realmente la mitad del cuadrado, y aquí hay que tener presente cuál es el significado de demostrar para alumnos de estas edades y también que esas demostraciones han de surgir de los conocimientos de los estudiantes, no del profesor.

La actuación del profesor en esta fase es muy importante para romper la dinámica de páginas llenas de dibujos sin ninguna explicación. El objetivo principal es que en clase se debata sobre las ideas geométricas y se reflexione sobre los procedimientos obtenidos.

Algunos desarrollos del problema tienen interés algebraico como ocurre cuando, enfrascados en su trabajo, se dan cuenta que para obtener un triángulo no es obligatorio tomar dos vértices contiguos y el centro del lado opuesto a ellos, sino que un punto cualquiera del lado opuesto satisfará la condición exigida por el enunciado. Una prueba puede venir de la idea de partir el cuadrado en dos partes según una perpendicular a uno de los lados, el cuadrado se divide en dos partes, cada una de ellas dividida a su vez en dos partes iguales.

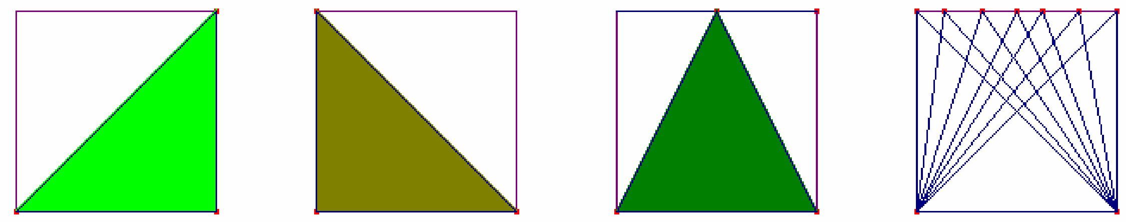


La geometría dinámica puede aportar una ayuda si tomamos el vértice superior del triángulo sobre un segmento que coincide con el lado y realizamos la animación del punto, los estudiantes “ven” que todos esos triángulos tienen el mismo área. Es más fácil preguntarse el por qué de este resultado y llegar a planteamientos algebraicos que desemboquen en el por qué de la fórmula para calcular el área del triángulo.

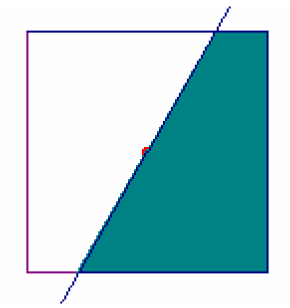


3. El proceso de generalización

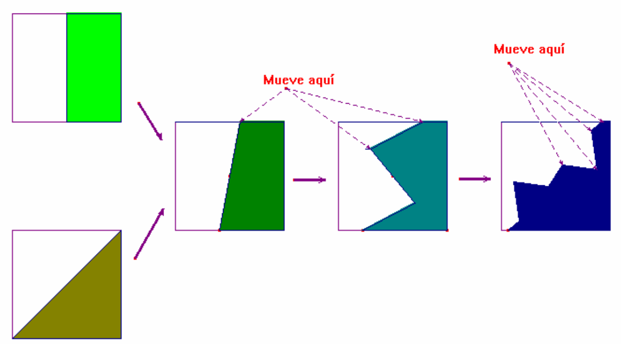
De todas las soluciones barridas por el punto de la solución anterior, hay varios (los triángulos isósceles aparecidos al principio, dos de ellos rectángulos) que se han obtenido como casos particulares. Podríamos considerar que esta nueva solución *tomar dos vértices contiguos y un punto en el lado opuesto*, es una solución que generaliza las anteriores.



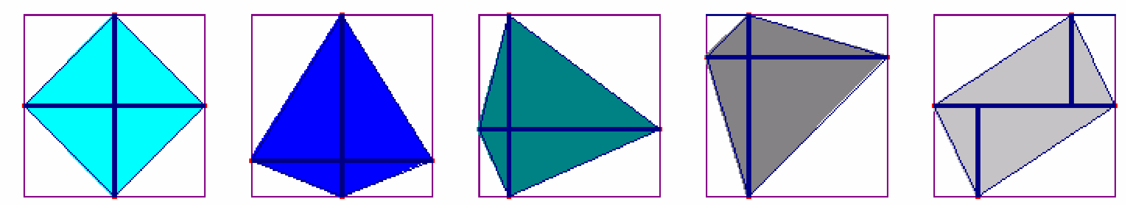
De la misma forma que con el triángulo, hay otras soluciones que se pueden generalizar. Si tomamos *una línea que pase por el centro del cuadrado*, obtenemos una figura que tardan en reconocer como trapecio (porque en los libros siempre aparece el isósceles). Si hacemos que la recta pase por el centro y por un punto del segmento del lado superior, podremos realizar la animación de éste último y ver los sucesivos trapecios de los que tanto el primer rectángulo como los dos triángulos rectángulos son casos particulares.



El proceso de generalización puede no acabar aquí, porque no es necesario que la línea sea recta, basta con que sea diseñada de forma que tenga un centro de simetría en el centro del cuadrado para que el polígono construido tenga por área la mitad y Cabri permite que los puntos donde cambia de inclinación se puedan colocar con ciertas restricciones con el fin de crear animaciones en la figura.



También podemos generalizar el procedimiento, si tomamos los puntos medios de los cuatro lados, obtenemos en su interior un nuevo cuadrado, pero no es obligatorio que sean exactamente esos puntos como se muestra en las figuras de abajo en las que llegamos a la cometa, el trapecio isósceles o el paralelogramo, y en todas las figuras dejar elementos móviles que permitan la animación.



Otro enfoque del trabajo puede venir de la búsqueda de nuevos polígonos dentro del cuadrado, han aparecido rectángulos triángulos de varios tipos, trapecios, polígonos de infinidad de lados. Hay otros polígonos conocidos que aún no han aparecido: paralelogramo, trapecio isósceles rombo, pentágono, etc.

4. Hablar de matemáticas

Avanzado el trabajo, las intervenciones del profesor, han de ir encaminadas a que los estudiantes realicen una descripción lo más precisa posible del procedimiento para obtener la figura. Esta precisión puede dependerá del grado de desarrollo de los estudiantes.

Los estudiantes suelen dar demasiados detalles de su procedimiento, algunos innecesarios, otros redundantes. En otros casos, el no utilizar la terminología adecuada les lleva a dar rodeos. Una forma de centrar el trabajo consiste en lanzar el reto en forma de pregunta: *¿Cómo podrías comunicar telefónicamente a un interlocutor cada una de las soluciones que has encontrado hasta ahora?*

Es difícil para el profesor tomar el papel de moderador sin dar sus propias soluciones, esto se puede conseguir creando el ambiente en clase para que sean los estudiantes los que reflexionen sobre las consecuencias de las descripciones de sus compañeros. Para ello se propone a la clase que cuando alguien describa un procedimiento, cada uno lo siga al pie de la letra y vean si pueden conseguir una figura que no cumpla las condiciones del problema con el fin de abrir el debate y mejorar la solución.

Algunas de las descripciones propuestas para la solución del trapecio son:

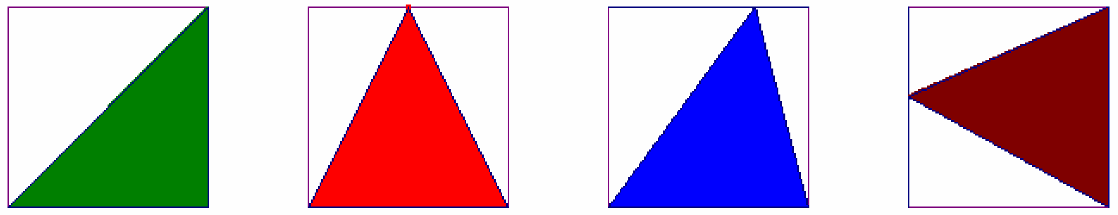
- *Tomar los extremos de dos lados opuestos, un poco inclinadas, y trazar una línea que los una.*
- *Tomar un punto, a una distancia determinada del vértice, y otro en el lado opuesto, a la misma distancia y unirlos con una línea recta.*
- *Cualquier línea que salga de un lado hacia el lado opuesto pasando por el centro*

Puede que contengan incorrecciones, pero revelan que los estudiantes están inmersos en el problema y realizan un gran esfuerzo por comprender, por hacerse entender y por expresarse con corrección. Como se apuntó en el Simposio de Valencia (1987) “Para que se desarrolle la capacidad de expresarse con claridad, es necesario valorar más la expresión de los intentos titubeantes y los procedimientos incorrectos en lugar de acallarlos a favor de los caminos seguros y las respuestas correctas.

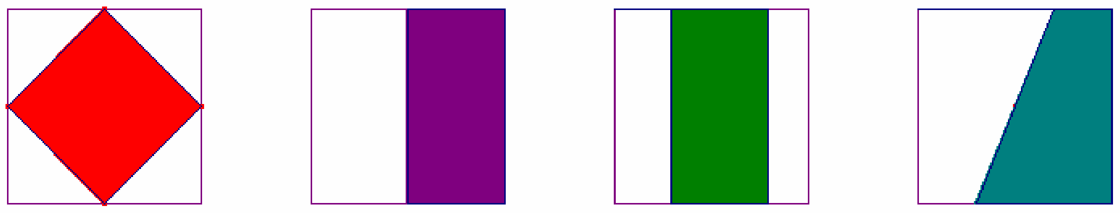
Una forma de introducir un elemento más de concisión consiste en plantear: *Pensad que lo vais a comunicar a alguien que está lejos y la conferencia es cara.*

5. Los polígonos como punto de partida.

Del trabajo anterior han aparecido varios tipos de triángulos: isósceles, isósceles y rectángulos a la vez y escalenos.

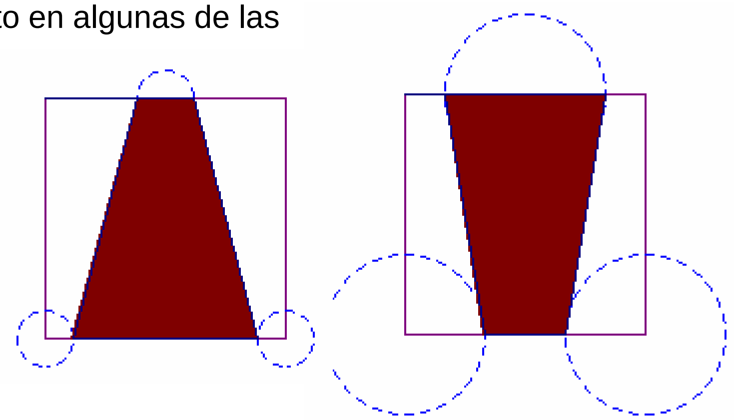


También rectángulos, cuadrados y trapecios.

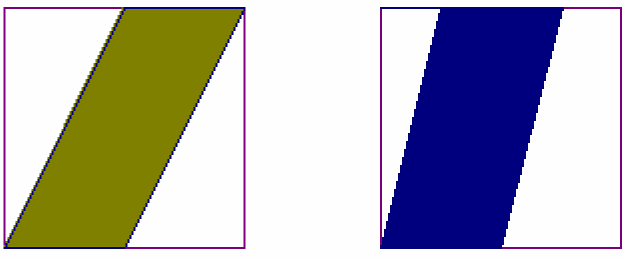


La propuesta de trabajo puede animar a considerar polígonos de distinto número de lados, a que consigan polígonos cóncavos (hasta ahora sólo han aparecido convexos y quizás sea necesaria una revisión de la idea de concavidad-convexidad en clase. También podemos proponer figuras conocidas que puede que no hayan aparecido hasta ahora como el rombo, el trapecio isósceles, el paralelogramo, el pentágono o el hexágono. La pregunta podría ser: *¿Qué otros polígonos conocidos podríamos encontrar en el interior del cuadrado cuya área sea la mitad?*

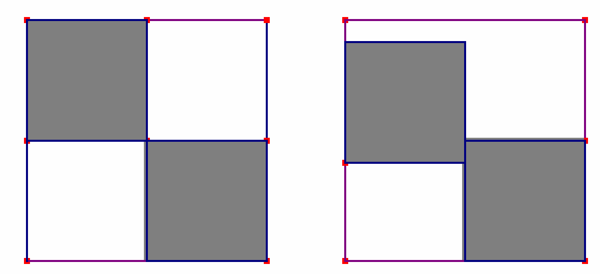
Pero es necesario dar un salto en algunas de las soluciones para llegar más lejos, por ejemplo, en la solución del trapecio hay que darse cuenta que la suma de las bases es igual a la mitad del lado para pasar a los trapecios isósceles.



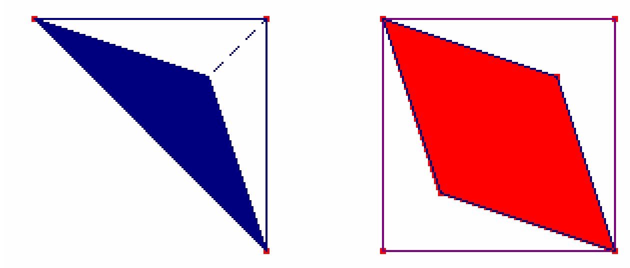
Encontraremos paralelogramos que tienen por base la mitad del lado y por altura el lado del cuadrado, y no es necesario que utilicen los vértices del cuadrado.



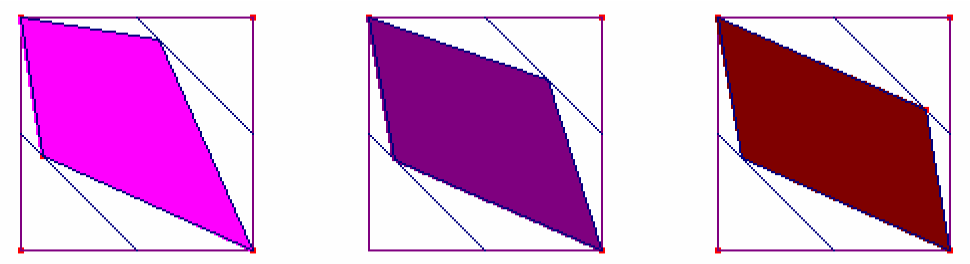
La idea de utilizar desplazamientos da sus frutos al revisar el trabajo realizado y obtener polígonos convexos (octógono) donde antes obteníamos polígonos cruzados y en algunos caso eran rechazados como polígonos.



Para el rombo podemos considerar la mitad del cuadrado y, en ella tomar su diagonal como base de un triángulo que tendrá por altura la mitad de la otra diagonal.

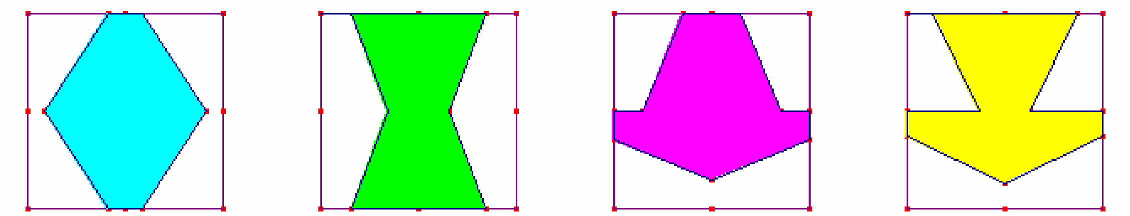


Esta solución admite generalizaciones a figuras que tengan sus vértices en dos paralelas a la diagonal del cuadrado que cortan a la otra diagonal a ¼ y ¾, así obtenemos la cometa, un cuadrilátero y un paralelogramo.

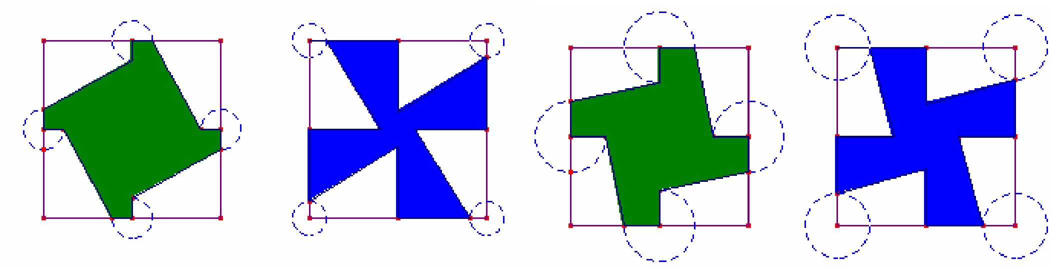


6. Combinaciones de soluciones

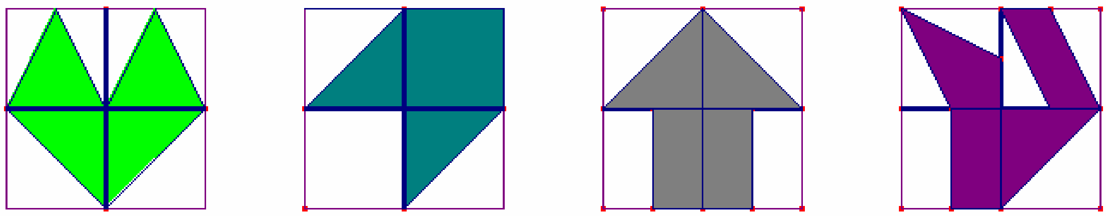
Otra forma de encontrar nuevos procedimientos proviene de dividir el cuadrado en cuatro cuadrados más pequeños y tomar en ellos una determinada solución como la del trapecio.



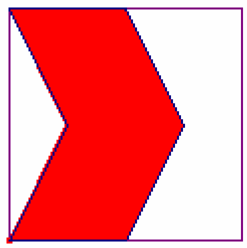
También la geometría dinámica permitirá nuevos avances con trapecios y giros de 90º alrededor del centro del cuadrado



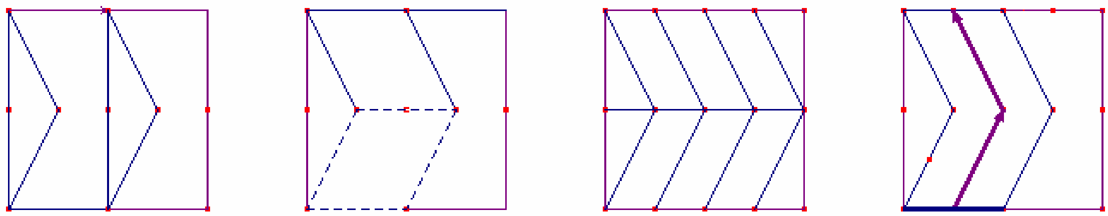
Así como combinaciones de soluciones distintas para dar lugar a formas más o menos reconocibles.



A veces podemos llegar a una misma figura como la de la derecha por varios caminos distintos:

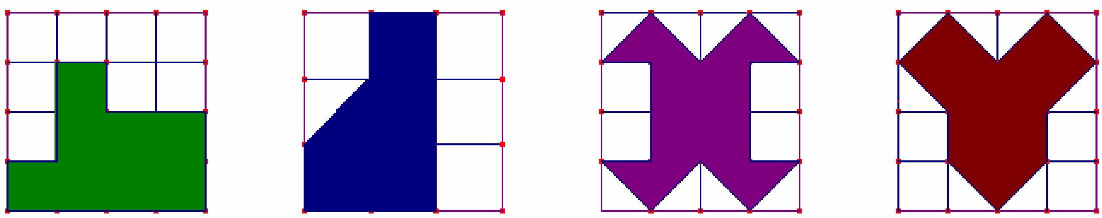


-A partir de un rectángulo al que se le traslada un triángulo hacia la derecha
-Considerar dos rectángulos iguales y en cada uno de ellos el paralelogramo.
-dividir el cuadrado en 16 partes iguales y tomar 8.
-La región obtenida al desplazar un segmento de longitud la mitad del lado del cuadrado según una determinada dirección



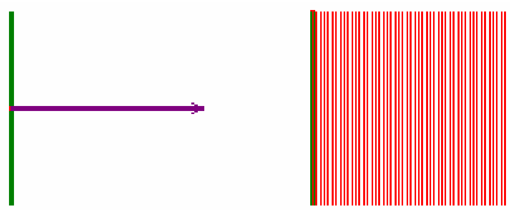
7. El área.

La última de las cuatro soluciones anteriores nos puede trasladar a una interesante forma de abordar el concepto de área. Si el trabajo se ha hecho con papel milimetrado, puede que hayan obtenido soluciones del tipo:



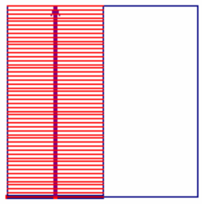
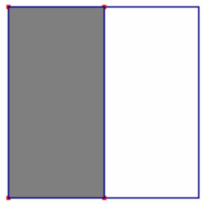
Todas estas soluciones pueden responder a un mismo procedimiento: Dividir el cuadrado en cuadrados más pequeños y tomar la mitad. A partir de aquí podemos obtener figuras más o menos elegantes.

Podemos contrastar este enfoque del área que podríamos llamar "estático" y que podríamos completar con otro más "dinámico" como el que ofrece Parker (1988) que considera el área como la cantidad de plano barrido por un segmento de recta móvil que ha

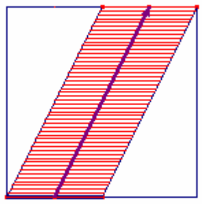


permanecido siempre paralelo al original. En Cabri podemos conseguir este efecto mediante un punto que se desplaza sobre un segmento y la traza que deja ese segmento (o el lugar geométrico).

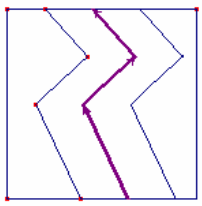
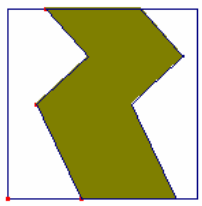
En nuestro caso, el desplazamiento de un segmento que mida la mitad del lado, en una dirección perpendicular a sí mismo, nos lleva a la primera solución apuntada en el enunciado.

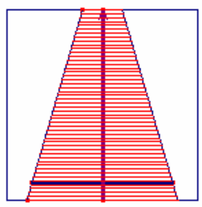
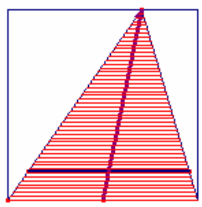
Cuando el segmento no se mueve en una dirección perpendicular sino formando un ángulo agudo consigo mismo, mientras permanece paralelo a su posición original, atravesará el mimo área y obtendremos un paralelogramo.



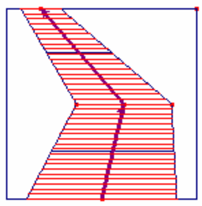
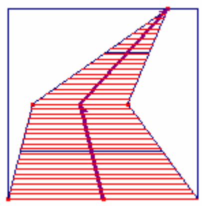

Lo sorprendente de esta visión para el problema que nos ocupa, es que aporta nuevas soluciones, ya que el camino que describe no influye en la cantidad de superficie barrida (será la misma que si lo hiciera en perpendicular), podremos cambiar de dirección tantas veces como deseemos, siempre que cumpla la condición de mantenerse siempre paralelo a su posición original.

Parker va más lejos ya que, si el segmento se acorta en proporción constante a medida que se desplaza, generará un trapecio. El área será la longitud media del segmento por la distancia que atraviesa. Para obtener una solución a nuestro problema únicamente nos tendremos que asegurar es que dicha media sea exactamente la mitad del lado del cuadrado. En el límite, si uno de los lados se reduce a un punto y el otro abarca todo el lado del cuadrado, tendremos la solución del triángulo.

Para acabar este apartado, podemos modificar estas soluciones si hacemos variar la dirección del segmento que decrece

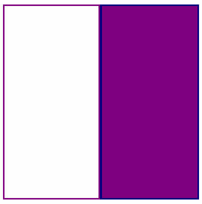
8. La demostración.

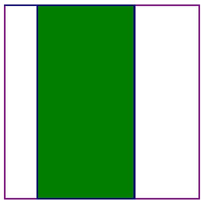
En muchos momentos del proceso relatado surge la necesidad de demostrar que el polígono obtenido tiene por área la mitad del cuadrado. En secundaria podríamos convenir que demostrar es convencer con argumentos lógicos, pero hay que tener en cuenta quién tiene que producir esos argumentos (los estudiantes) y a quién van dirigidos (sus compañeros). El tipo de argumentos que son esperables en estas edades es distinto del que maneja el matemático.

En muchos casos es conveniente dar por válidas justificaciones a veces incompletas o ambiguas ya que el objetivo que se persigue es iniciar a los estudiantes en la conveniencia de demostrar y en el proceso de demostración y que den sus primeros pasos en este sentido. Como se ha señalado al principio, es fundamental que se cree en clase una atmósfera de indagación para que los estudiantes sientan la necesidad de probar o refutar sus conjeturas cuando encuentran soluciones al problema.

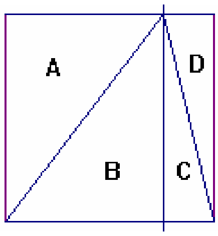
Los argumentos más frecuentes son de tipo geométrico: equivalencia de áreas, movimientos en el plano, etc. Mas difícil es que surjan de los alumnos los procedimientos algebraicos como la manipulación de fórmulas para el cálculo del área de los polígonos.

La primera solución del rectángulo resulta *evidente* para los alumnos ya que se ha dividido el cuadrado en dos partes iguales, cuando el rectángulo se dibuja en el interior del cuadrado, proponen un desplazamiento hacia uno de los lados. El profesor puede sugerir la obtención del área mediante la fórmula para el rectángulo.

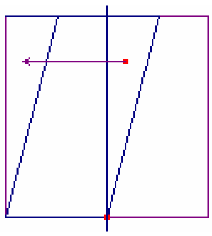




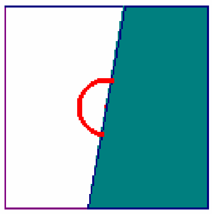
Cuando se les propone la demostración para el triángulo, suelen utilizar la congruencia de triángulos. También aquí el profesor puede proponer la utilización de *base por altura dividido por dos.*



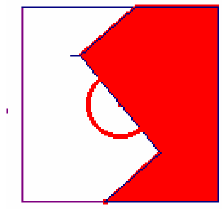
En el paralelogramo, se ve que una traslación del triángulo hacia la izquierda, lo convierte en un triángulo.



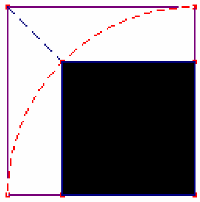
En cambio, para el trapecio los alumnos propusieron realizar un giro de 180º alrededor del centro del cuadrado para superponer los dos trapecios. La demostración algebraica, que toma en cuenta que la suma de las bases es igual al lado del cuadrado, tuvo la ventaja de ser útil para otros tipos de trapecios.



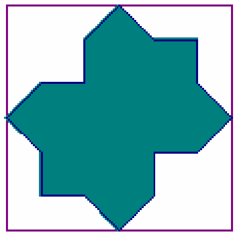
En cambio, la demostración del giro se mantuvo disponible cuando se toman líneas con centro de rotación de orden 2.



Avanzado el trabajo, se les propuso demostrar que, según se hace la construcción del cuadrado coloreado de la figura de la derecha, su área será la mitad del grande.

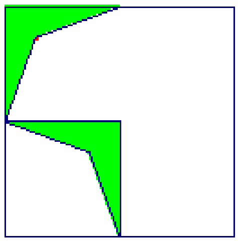


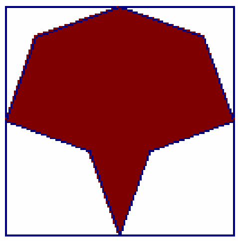
9. Figuras de La Alhambra.



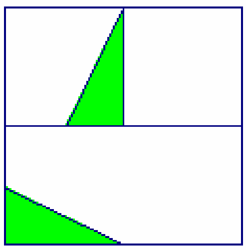
Algunas de las soluciones que obtienen son estéticamente elegantes, a un cuadrado se le pueden quitar dos pequeños triángulos en dos lados opuestos y añadírselos en los otros dos lados.

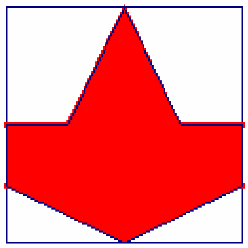
Al rectángulo de la parte superior le podemos quitar y poner las figuras verdes que aparecen



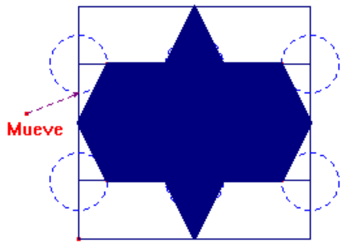


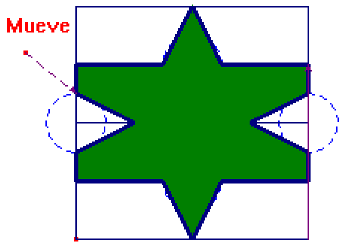
Algo parecido con el rectángulo inferior:



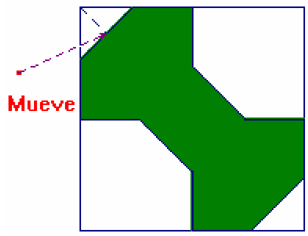


Pueden conseguir figuras con forma de estrella.





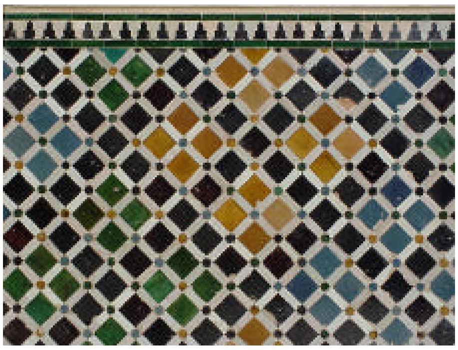
O el polígono con forma de hueso



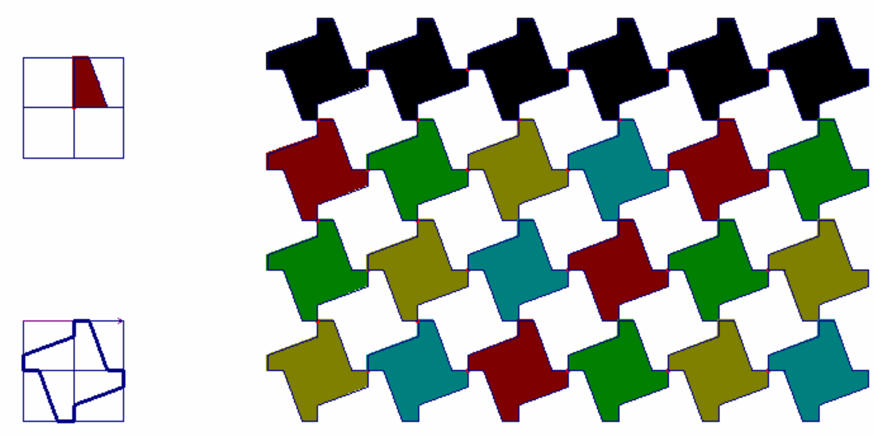
10. Mosaicos.

Muchas de estas figuras las podemos encontrar en los diseños nazaríes de la Alhambra de Granada y esta puede ser una nueva vía para enfocar la investigación, el conseguir baldosas que, por repetición a base de traslaciones, giros y simetrías, den lugar a mosaicos que recubran el plano.

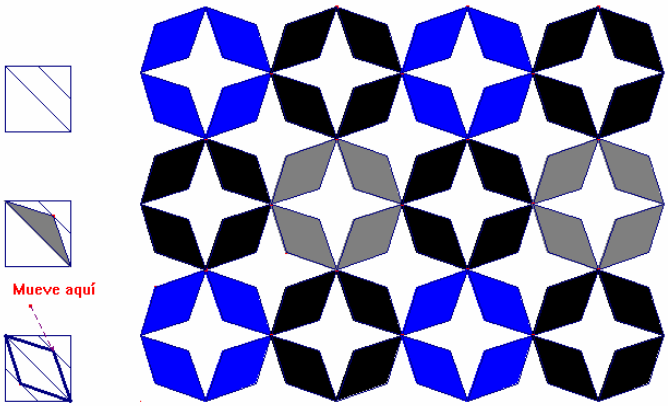
La Alhambra es el reino del cuadrado, lo encontramos de forma explícita en azulejos que recubren las paredes con combinaciones de colores que no nos dejan indiferentes. Otras veces los cuadrados quedan ocultos tras otras formas.



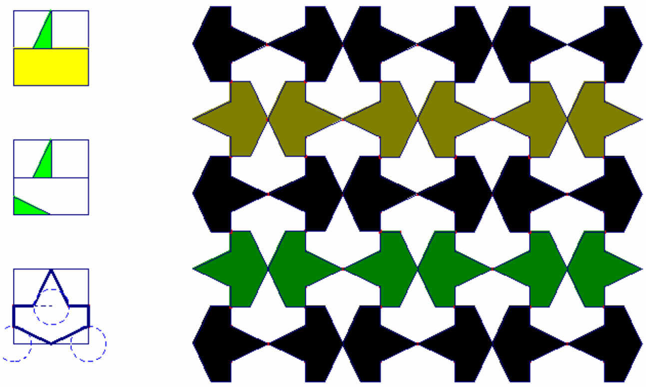
La solución de los cuatro trapecios utilizando traslaciones de la baldosa:



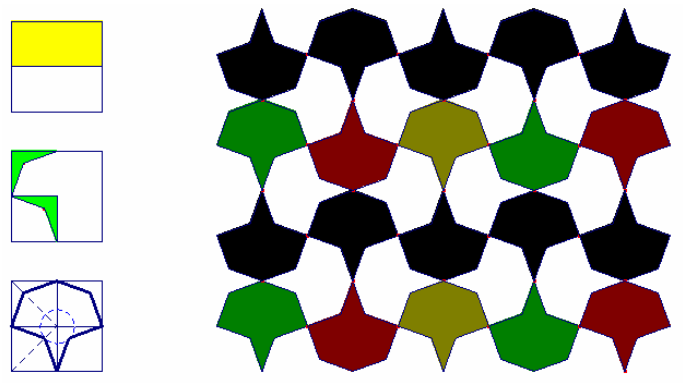
La solución de los rombos aparece en el Patio de los Leones de la Alhambra utilizando simetrías axiales según los lados del cuadrado:



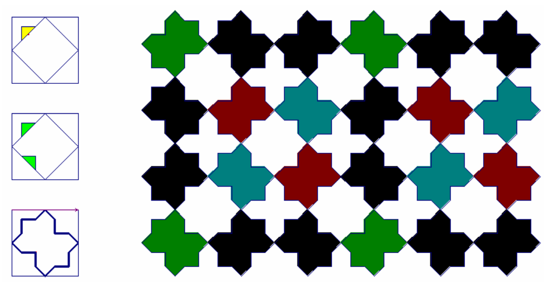
En una de las columnas que rodean al patio de los leones encontramos un mosaico parecido a éste:

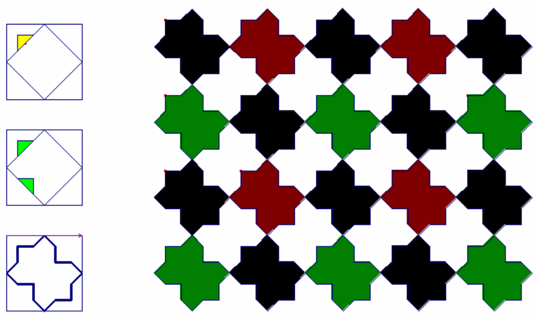


También podemos reproducir a baldosa de las agujas con la mitad del cuadrado, después utilizaremos simetrías rotacionales en los centros de los lados del cuadrado para conseguir el mosaico.

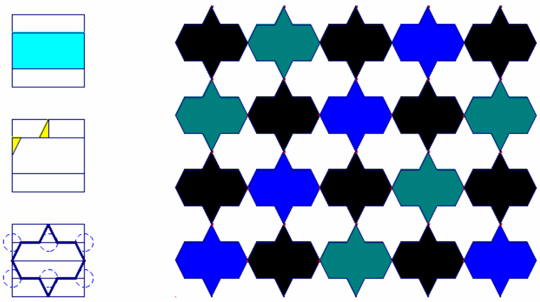


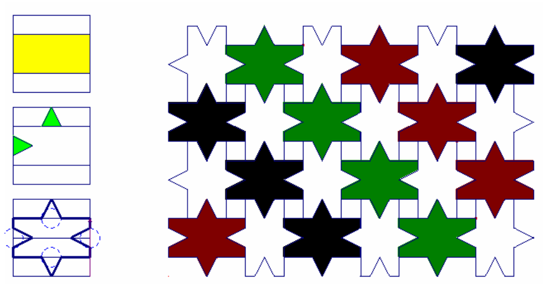
La misma baldosa cuadrada utilizando dos movimientos distintos: simetrías (izquierda) y traslaciones (derecha)



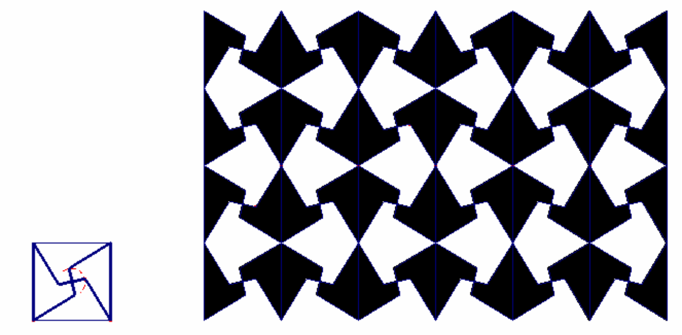


Las estrellas que hemos encontrado anteriormente y que también encontramos en una de las primeras salas en la visita a los palacios nazaríes, con una orientación distinta ha podido ser reproducida con una de las soluciones de *la mitad del cuadrado*.

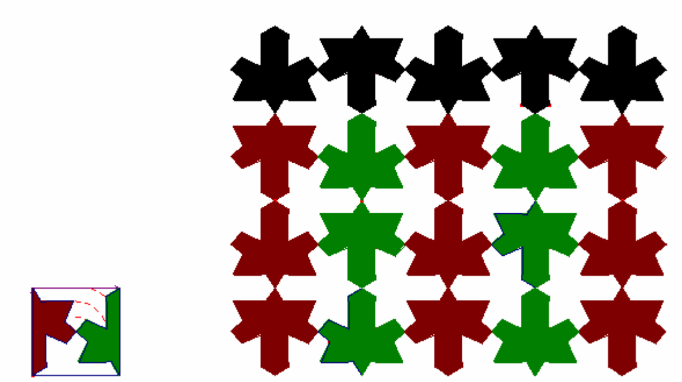




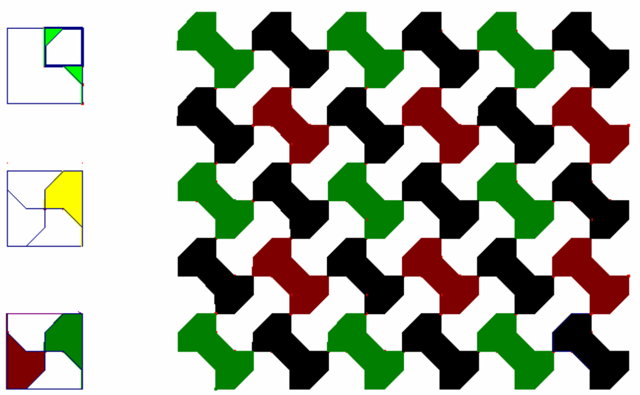
Otra forma de conseguir algunas de las figuras anteriores proviene de trazar una línea con centro de rotación de orden 4 en el centro del cuadrado y colorear dos regiones opuestas de las cuatro en que se ha dividido el cuadrado, la repetición de estas baldosas se hace por simetría axial:



De esta forma conseguimos la baldosa con forma de hoja:



Y la que tiene forma de hueso para acabar esta muestra



11. Ampliaciones.

Algunas ampliaciones para alumnos que están interesados y desean llegar más lejos:

- Obtener un polígono cuya área sea la mitad de un triángulo isósceles.
- Construir polígonos cuya área sea la mitad con las piezas del tangram chino.
- Obtener una figura de área la mitad de un hexágono o un círculo.
- Creación de mosaicos con las figuras obtenidas.
- El paso del plano al espacio: construir un cuerpo cuyo volumen sea la mitad de un cubo. Estudio de las secciones modulares del cubo.

12 Conclusiones.

Una investigación de este tipo, puede plantear dificultades al profesor: Todo esto está muy bien, pero tengo un programa que cumplir y no puedo perder tanto tiempo. Podríamos responder a esta pregunta si analizamos cuáles son los conocimientos matemáticos implicados en el proceso relatado. Los alumnos:

Han utilizado la terminología geométrica y han enriquecido su vocabulario en la descripción de formas y figuras.

- Han profundizado en conceptos como los de polígono, área o los movimientos en el plano (traslaciones, simetrías, giros) y han relacionado unos con otros.
- Han estimado, medido y calculado longitudes, y superficies.
- Han consolidado destrezas como la utilización de fórmulas y la manipulación algebraica.
- Han realizado construcciones geométricas con regla y compás y con ordenador con el programa Cabri Géomètre.
- Han utilizado propiedades y resultados geométricos como el teorema de Pitágoras o la semejanza.

Por otra parte, también son conocimientos los procedimientos y estrategias que se utilizan para hacer matemáticas.

- La búsqueda sistemática a la vez que imaginativa de soluciones a un problema.
- La generalización desde caso particulares y la particularización al darse cuenta de que una solución engloba a otras encontradas anteriormente.
- La formulación de conjeturas y la búsqueda de contraejemplos para refutarlas.
- La demostración utilizando argumentos geométricos y algebraicos.

Tras esta forma de proceder en el aula, el mejor logro consiste en la actitud típicamente matemática con que el estudiante interpreta esta experiencia:

- Han descrito y definido las figuras obtenidas con sus propias palabras.
- Han defendido sus soluciones ante sus compañeros.

- Han tomado decisiones en el curso de su trabajo y han examinado las consecuencias de su elección.
- Han tomado una vía de trabajo hasta que ha dejado de ser interesante. En algunos casos han ideado un método (p.e. el de cuadriculación) y pronto lo han abandonado por ser demasiado repetitivo encaminándose hacia procedimientos más interesantes y satisfactorios.
  Han tenido la oportunidad de apreciar la simetría y la regularidad de las formas creadas

13 Bibliografía.

Crawfort, D. ¿Qué es un cuadrilátero?. En Walter (1988) pp 9-12 (MEC: Madrid)
Fielker, D. (1987) Rompiendo las cadenas de Euclides (MEC: Madrid)
García Cruz, J.A. (1986) Actividades de Geometría. En Apuntes de Educación, Naturaleza y Matemáticas núm. 20 pp. 12-13 (Anaya: Madrid)
Mora, JA y Pérez, P. (1987). Geometría en Propuesta de Diseño Curricular de Matemáticas de la Comunidad Valenciana. (Generalitat Valenciana: Valencia).
Parker, j. Revisando el concepto de área. En Walter (1988) pp 23-31 (MEC: Madrid).
Ruiz Garrido y Pérez Gómez (1987). Visiones matemáticas de la Alhambra. El color. Revista Epsilon, monográfico dedicado a la Alhambra pp. 51-59.
Schoenfeld, A. (1983). Sugerencias para la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Enseñanza de la Matemática a Debate (MEC: Madrid).
Walter.M. (1988) Geometría (MEC. Colección Documentos y Propuestas de Trabajo: Madrid)
Walters (1981). Matematicians at large (ATM)